SOLUÇÃO DA PROVA DA 2ª FASE – OMIFCE 2024
Nível III

01. Jorge, um dos fiéis torcedores do Esporte Clube Arroz Doce, observou que as quantidades de derrotas, empates e vitórias de seu time, em um campeonato de futebol no qual disputou 21 jogos, formavam, nessa ordem, uma progressão geométrica crescente. Sabe-se ainda que cada vitória vale 3 pontos; cada empate, 1 ponto e que a derrota não tem pontuação.
Sabendo que o Esporte Clube Arroz Doce sofreu mais de uma derrota nesse campeonato, quantos pontos ele fez?

A) 18
B) 24
C) 30
D) 36
E) 42

Questão 01 – Alternativa E

Solução: Considere d a quantidade de derrotas e q, $q > 1$, a razão da PG crescente. Assim, os termos da PG (d, dq, dq^2) indicam as respectivas quantidades de derrotas, empates e vitórias no campeonato, o que nos leva a deduzir que d e q devem ser inteiros positivos e $q > 1$. Daí, tem-se:

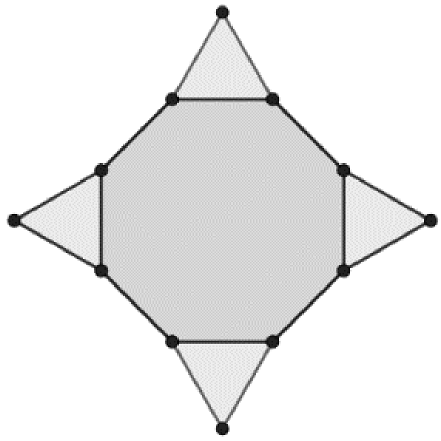
i) Total de partidas: $d + d \cdot q + d \cdot q^2 = 21 \Rightarrow d \cdot (1 + q + q^2) = 21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$.

ii) Como d é divisor (fator) positivo de 21, as possibilidades para d são as seguintes:

- $d = 1$ (não convém, pois ele sofreu mais de uma derrota);
- $d = 21 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 1 \Rightarrow q \cdot (1 + q) = 0 \Rightarrow q = 0$ (não convém!) ou $q = -1$ (não convém!);
- $d = 3 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 7 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow q = -3$ (não convém!) ou $q = 2$ (ok!);
- $d = 7 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 3 \Rightarrow q^2 + q - 2 = 0 \Rightarrow q = -2$ (não convém!) ou $q = 1$ (não convém).

Logo, a única possibilidade é $d = 3$ e $q = 2$. Portanto, foram $d = 3$ derrotas, $dq = 3 \cdot 2 = 6$ empates e $dq^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$ vitórias, gerando um total de $0 + 6 \cdot 1 + 12 \cdot 3 = 6 + 36 = 42$ pontos.

02. Após se tornar o Hokage, ninja líder da Vila Oculta da Folha, Naruto Uzamaki decidiu aprimorar as shurikens da Vila, armas metálicas afiadas em forma de estrela de quatro pontas. Para isso, ele consultou Gorou Tetsuya, um renomado ferreiro da Aldeia, que apresentou um novo modelo de shuriken em formato de prisma, cuja base é composta por um octógono regular, cujos lados medem 2 *cm*, e quatro triângulos equiláteros, conforme a figura abaixo. Para a confecção de uma shuriken, Gorou Tetsuya utilizou uma chapa de metal de espessura constante.

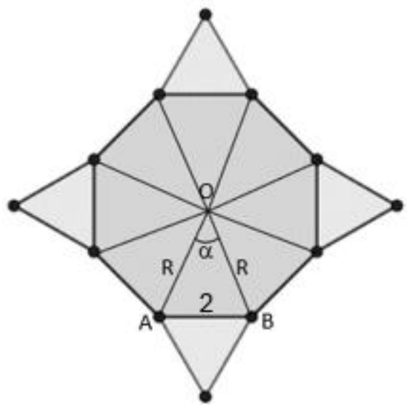


Qual a área da base, em cm^2, do novo modelo de shuriken?

A) $8\sqrt{3}+8\sqrt{2}+8$
B) $4\sqrt{3}+8\sqrt{2}+8$
C) $8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+8$
D) $8\sqrt{3}+8\sqrt{2}+4$
E) $4\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4$

Questão 02 – Alternativa B

Solução: Ligando os vértices do octógono regular ao seu centro O, e chamando a distância de cada vértice ao centro O de R (raio da circunferência circunscrita), obtêm-se a figura abaixo, na qual se tem:



i) ângulo central: $\alpha = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

ii) Lei dos cossenos no triângulo AOB:

$$2^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 45° \Rightarrow 4 = 2R^2 - R^2\sqrt{2} \Rightarrow 4 = R^2(2-\sqrt{2}) \Rightarrow R^2 = \frac{4}{2-\sqrt{2}} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{4-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

iii) Área do octógono regular:

$$A_{OCT} = 8 \cdot [AOB] = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen } 45° = 2\sqrt{2}R^2 = 2\sqrt{2}(4 + 2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} + 8$$

iv) Área de um triângulo equilátero de lado 2:

$$A_{TRI} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

A área da base da shuriken equivale à área do octógono regular, mais a área de 4 triângulos equiláteros, ou seja:

$$\text{Área procurada} = 8\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{3} = (4\sqrt{3} + 8\sqrt{2} + 8)\ cm^2.$$

03. João e Bruna são membros de um mesmo clube de jogadores de damas. Nesse clube, sempre que um membro deseja jogar damas, ele acessa um aplicativo que seleciona aleatoriamente outro membro como adversário, agendando dia e horário para uma partida online do jogo. O aplicativo também mostra o histórico das partidas assim disputadas por cada um dos membros do clube. No histórico de João, nota-se que, de cada 10 partidas disputadas, ele venceu cinco, empatou três e perdeu duas. Já no histórico de Bruna, percebe-se que, de cada 10 partidas disputadas, ela venceu sete, empatou duas e perdeu uma. Uma partida online de damas foi agendada para hoje, entre João e Bruna.
Considerando os dados dos históricos, qual é a probabilidade de João vencer a partida entre ele e Bruna?

A) 5%
B) 10%
C) 15%
D) 20%
E) 25%

Questão 03 – Alternativa D

Solução: Segundo os históricos, tem-se que as probabilidades de João vencer, empatar e perder são, respectivamente, $P(JV) = 5/10$, $P(JE) = 3/10$ e $P(JP) = 2/10$; enquanto as probabilidades de Bruna ganhar, empatar e perder são, respectivamente, $P(BV) = 7/10$, $P(BE) = 2/10$ e $P(BP) = 1/10$.

Em uma partida disputada entre João e Bruna, existem apenas três resultados possíveis, cujas probabilidades são:

1) João vence e Bruna perde: $P(JV) \cdot P(BP) = (5/10) \cdot (1/10) = 5/100 = 5\%$;

2) João e Bruna empatam: $P(JE) \cdot P(BE) = (3/10) \cdot (2/10) = 6/100 = 6\%$;

3) João perde e Bruna vence: $P(JP) \cdot P(BV) = (2/10) \cdot (7/10) = 14\%$.

Devemos calcular a probabilidade de João vencer, na certeza de que o resultado é possível, ou seja:

$$P(JV \mid \text{Possível}) = \frac{P(JV \text{ e } BP)}{P(\text{Possível})} = \frac{5\%}{5\% + 6\% + 14\%} = \frac{5}{25} = 0{,}2 = 20\%.$$

04. Adicionando-se a cada um dos números 4, 76, 180 um mesmo valor inteiro positivo n, obtém-se os quadrados de três termos consecutivos de uma progressão aritmética.
Nessas condições, é correto afirmar que o valor absoluto da soma dos três termos da progressão é igual a

A) 33.
B) 37.
C) 41.
D) 45.
E) 49.

Questão 04 – Alternativa A

Solução: Sendo x, $x + r$ e $x + 2r$ os três termos da progressão aritmética, devemos ter:

i) $4 + n = x^2$.

ii) $76 + n = (x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2$.

iii) $180 + n = (x + 2r)^2 = x^2 + 4xr + 4r^2$.

iv) De (ii) – (i):

$$(76 + n) - (4 + n) = (x^2 + 2xr + r^2) - x^2 \Rightarrow 72 = 2xr + r^2.$$

v) De (iii) – (ii):

$$104 = 2xr + 3r^2 \Rightarrow 104 = 2xr + r^2 + 2r^2 \Rightarrow 104 = 72 + 2r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4.$$

vi) Substituindo-se $r = 4$ ou $r = -4$ em (iv), obtém-se:

$$72 = \pm 8x + 16 \Rightarrow x = 7 \text{ ou } x = -7,$$

respectivamente.

Logo, temos que:

• $4 + n = (\pm 7)^2 \Rightarrow n = 49 - 4 = 45$ (inteiro positivo, ok!)

• Se $r = 4$ e $x = 7 \Rightarrow$ PA: $(x, x + r, x + 2r) = (7, 11, 15) \Rightarrow$ soma igual a 33

• Se $r = -4$ e $x = -7 \Rightarrow$ PA: $(x, x + r, x + 2r) = (-7, -11, -15) \Rightarrow$ soma igual a -33

Portanto, o valor absoluto da soma dos três termos será $|\pm 33| = 33$.

05. Certo professor do IFCE é conhecido por procurar padrão em quase tudo que lhe é apresentado. Quando esse professor leu que as inscrições para a OMIFCE se iniciaram no mês 8 do ano 2024 e que, no último dia, as inscrições terminavam às 17h, ele percebeu que

$$2 + 0 + 2 + 4 = 1 + 7 = 8,$$

isto é, ao somarmos tanto os dígitos do número que representa o ano quanto os do número que representa a hora do término das inscrições, obtemos 8 como resultado, o número do mês do início das inscrições.
Trabalhando com esse padrão observado, o professor listou, em ordem crescente, todos os números com menos de cinco algarismos com essa propriedade, ou seja, números cuja soma dos dígitos é oito, obtendo a sequência

$$(8,\ 17,\ 26,\ 35,\ ...,\ 2024,\ ...,\ 8000).$$

Nessa sequência escrita pelo professor, qual é a posição ocupada pelo número 2024?

A) 68ª
B) 76ª
C) 84ª
D) 91ª
E) 99ª

Questão 05 – Alternativa C

Solução: Inicialmente, vamos contar os números da sequência com até três dígitos, ou seja, os números da forma abc, tais que

$$a + b + c = 8,$$

em que $a,\ b,\ c \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 8\}$. Essa quantidade de números corresponde ao número de soluções inteiras não negativas da equação acima. Uma solução para essa equação, por exemplo, pode ser:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet \quad \Leftrightarrow \quad (4,\ 2,\ 2) \quad \Leftrightarrow \quad 422$$
$$\mid\ \mid \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \quad \Leftrightarrow \quad (0,\ 0,\ 8) \quad \Leftrightarrow \quad 008 = 8$$

Assim, a quantidade de números naturais com até três dígitos, cuja soma é oito, equivale ao número de permutações de 10 elementos com repetição de 8 e 2, ou seja, $P_{10}^{8,2} = \dfrac{10!}{8! \cdot 2!} = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45.$

Contemos agora os números de quatro algarismos iniciados por 1, ou seja, os da forma $1abc$, tais que

$$a + b + c = 7,$$

em que a, b, $c \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$.

Uma solução particular, por exemplo, pode ser:

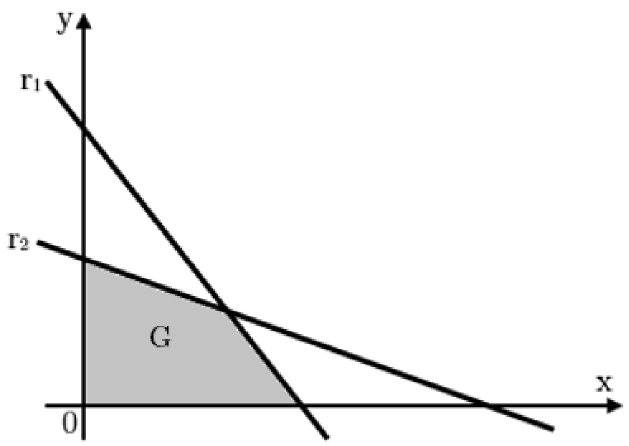
$$\bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet \mid \bullet \quad \Leftrightarrow \quad (4, 2, 1) \quad \Leftrightarrow \quad 1421$$

Assim, a quantidade de números da forma $1abc$ será $P_9^{7,2} = \dfrac{9!}{7! \cdot 2!} = \dfrac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$.

Daí, a lista (8, 17, 26, ..., 800, 1007, ..., 1700) tem 45 + 36 = 81 números. Continuando com a lista, os próximos números são 2006, 2015 e 2024, que ocupará a posição de número 81 + 3 = 84.

06. A região G sombreada a seguir é definida por:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 6 \text{ e } 2x + 5y \leq 10\}$$



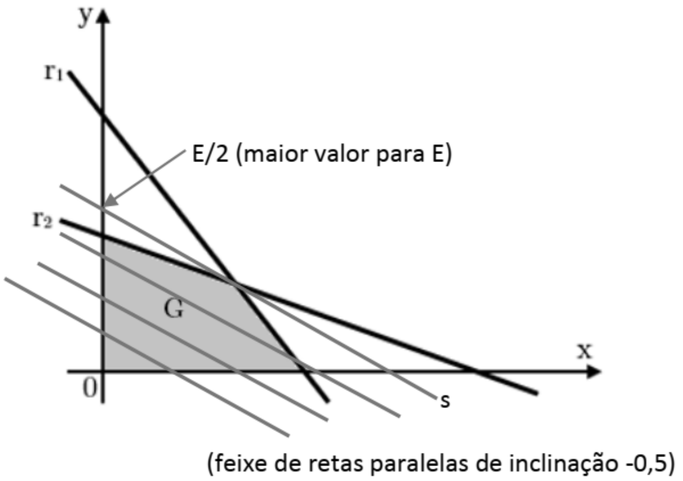
Quando o ponto $(x,\ y)$ pertence a G, qual o valor máximo que a expressão $E = x + 2y$ pode assumir?

A) $\dfrac{23}{11}$
B) 3
C) 4
D) $\dfrac{46}{11}$
E) 5

Questão 06 – Alternativa D

Solução: Pelo enunciado, as equações das retas r_1 e r_2 são, respectivamente, $3x + 2y = 6$ e

$2x + 5y = 10$, cujas inclinações (coeficientes angulares) são $-3/2 = -1{,}5$ e $-2/5 = -0{,}4$. Para cada constante real E, temos que a equação $E = x + 2y$ (ou $y = -\frac{1}{2}x + \frac{E}{2}$) representa uma reta de inclinação $-1/2 = -0{,}5$ que intersecta o eixo y no ponto de ordenada $E/2$. Logo, a equação $E = x + 2y$ representa um feixe de retas paralelas de inclinação $-0{,}5$ que cortam o eixo y no ponto de ordenada $E/2$. A reta desse feixe que passa por um ponto (x, y) da região G e corta o eixo y no ponto mais alto (maior valor para $E/2$ e, consequentemente, maior valor para E) é a reta s de inclinação $-0{,}5$ que passa no ponto de interseção das retas r_1 e r_2, uma vez que s fica entre r_1 e r_2, pois suas inclinações são tais que $-1{,}5 < -0{,}5 < -0{,}4$.



Resolvendo o sistema formado pelas equações $3x + 2y = 6$ e $2x + 5y = 10$, obtém-se $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{30-20}{15-4} = \dfrac{10}{11}$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{30-12}{15-4} = \dfrac{18}{11}$ (ponto de interseção de r_1 e r_2). Logo, o maior valor da expressão $E = x + 2y$ será $E = \frac{10}{11} + 2 \cdot \frac{18}{11} = \frac{46}{11}$.

07. Quantas soluções reais a equação $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{x}$ apresenta?

Questão 07 – Resposta: 1

Solução: Defina $u = \sqrt[3]{x}$. Daí, $x = u^3$.

Substituindo esses valores na equação original, obtemos:

$$\left(1+\sqrt{1+u^3}\right)^{\frac{1}{2}} = u$$

$$1+\sqrt{1+u^3} = u^2$$

$$\sqrt{1+u^3}=u^2-1$$
$$1+u^3=(u^2-1)^2$$
$$1+u^3=[(u+1)(u-1)]^2$$
$$(u+1)(u^2-u+1)=(u+1)^2(u-1)^2$$
$$(u+1)(u^2-u+1)-(u+1)^2(u-1)^2=0$$
$$(u+1)[(u^2-u+1)-(u+1)(u-1)^2]=0$$
$$(u+1)[(u^2-u+1)-(u+1)(u^2-2u+1)]=0$$
$$(u+1)[(u^2-u+1)-(u^3-2u^2+u+u^2-2u+1)]=0$$
$$(u+1)[(u^2-u+1)-(u^3-u^2-u+1)]=0$$
$$(u+1)(2u^2-u^3)=0$$
$$u^2(u+1)(2-u)=0$$

$$u+1=0 \qquad \text{ou} \qquad u^2=0 \qquad \text{ou} \qquad 2-u=0$$

Portanto,

$$u=-1 \qquad \text{ou} \qquad u=0 \qquad \text{ou} \qquad u=2$$

Daí, como $x=u^3$, segue que

$$x=-1 \qquad \text{ou} \qquad x=0 \qquad \text{ou} \qquad x=8$$

Substituindo na equação original observamos que

Se $x=-1$

$$\left(1+\sqrt{1-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{-1} \;\Rightarrow\; 1=-1 \quad \text{(absurdo)}$$

Se $x=0$

$$\left(1+\sqrt{1-0}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{0} \;\Rightarrow\; \sqrt{2}=0 \quad \text{(absurdo)}$$

Se $x=8$

$$\left(1+\sqrt{1+8}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{8} \;\Rightarrow\; 2=2 \quad \text{(ok!)}$$

Portanto, a equação possui uma única solução real, a saber $x=8$.

08. Determine o número inteiro positivo x, tal que

$$\frac{x}{432} = 0{,}0\overline{a25}\,,$$

em que a é um dígito e $0{,}0\overline{a25} = 0{,}0a25a25a25...$ é uma dízima periódica cujo período é $a25$.

Questão 08 – Resposta: 40

Solução: Temos que $\frac{x}{432}\cdot 10 = 0{,}\overline{a25}$ e $\frac{x}{432}\cdot 10^4 = a25{,}\overline{a25}$. Daí, subtraindo-se membro a membro a primeira da segunda igualdade, obtém-se:

$$\frac{x}{432}\cdot 10^4 - \frac{x}{432}\cdot 10 = a25{,}\overline{a25} - 0{,}\overline{a25} \Rightarrow \frac{x}{432}\cdot(10^4 - 10) = a25 \Rightarrow x = \frac{(a25)\cdot 432}{9990} \Rightarrow x = \frac{(a25)\cdot 2^4\cdot 3^3}{2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 37} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{(a25)\cdot 8}{5\cdot 37}$$

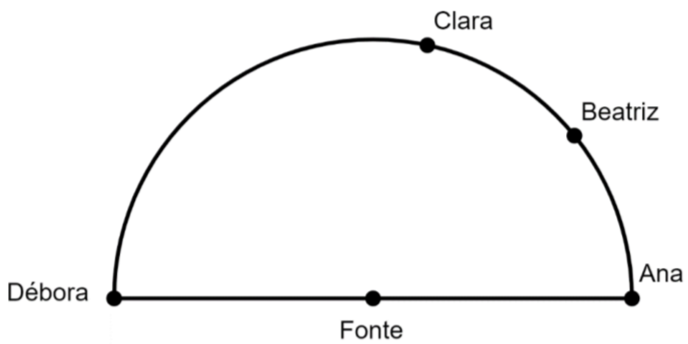
Por um lado, como x é inteiro, 8 e 37 são primos entre si e 5 e 37 também são primos entre si, então $a25$ é múltiplo de 37. Por outro lado, como $a25 = 100a + 25$ é divisível por 25, obrigatoriamente, $a25$ é múltiplo de 25 e de 37, sendo 25 e 37 primos entre si. Logo, devemos ter:

$$100 \le a25 = b\cdot 25\cdot 37 = b\cdot 925 \le 999\text{, em que } b \text{ é inteiro.}$$

Portanto, $b = 1$ (único valor possível). Daí tem-se que $a25 = 925$, ou seja:

$$x = \frac{(925)\cdot 8}{5\cdot 37} = \frac{25\cdot 37\cdot 8}{5\cdot 37} = 40\,.$$

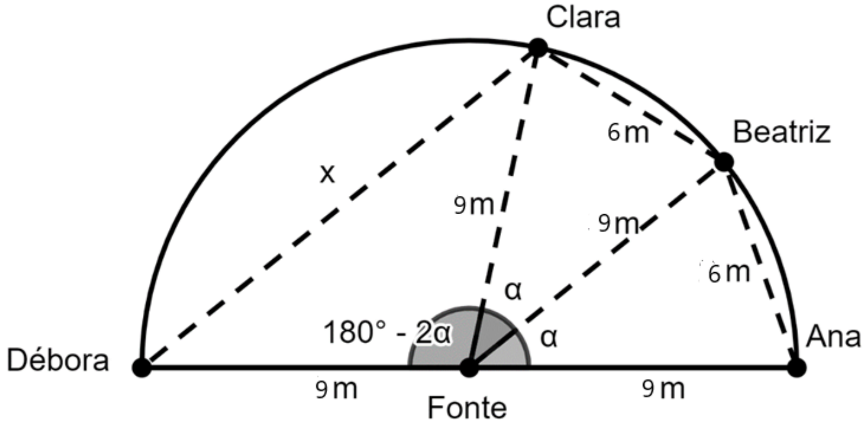
09. Quatro amigos, Ana, Beatriz, Clara e Débora, se encontram dispostas em uma praça em formato de uma semicircunferência, com uma fonte em seu centro. A distância entre Ana e Beatriz é de 6 metros e a distância entre Beatriz e Clara é também de 6 metros. Sabe-se ainda que a distância entre Ana e Débora é de 18 metros e que todas as distâncias foram tomadas em linha reta. A figura abaixo ilustra a situação.



Qual a distância, em metros, entre Clara e Débora?

Questão 09 – Resposta: 14

Solução: Como a distância entre Ana e Débora é de 18 metros e a fonte se encontra no centro da semicircunferência, percebemos que a semicircunferência tem raio de 9 metros.
Chamando de α o ângulo central do arco formado por Ana e Beatriz e de x a distância entre Clara e Débora, e colocando as demais medidas, chegamos à imagem abaixo.



Considerando o triângulo Ana-Beatriz-Fonte e aplicando a Leis dos Cossenos, temos que

$$6^2 = 9^2 + 9^2 - 2\cdot 9\cdot 9\cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; 162\cdot\cos\alpha = 162 - 36 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{126}{162} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

Por outro lado, considerando o cosseno do arco duplo, temos que

$$\cos(2\alpha) = 2\cdot\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos(2\alpha) = 2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2 - 1 \Rightarrow \cos(2\alpha) = 2\cdot\frac{49}{81} - 1 \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{98}{81} - \frac{81}{81} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{17}{81}$$

Sendo assim, $\cos(180° - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = -\frac{17}{81}$.
Finalmente, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo Clara-Débora-Fonte, temos

$$x^2 = 9^2 + 9^2 - 2\cdot 9\cdot 9\cdot\cos(180° - 2\alpha) \Rightarrow x^2 = 81 + 81 - 162\cdot\left(-\frac{17}{81}\right) \Rightarrow x^2 = 162 + 2\cdot 17 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 14$$

Portanto, a distância entre Clara e Débora é 14 metros.

10. Mariana possui um brinquedo que consiste em um cubo cujas faces são coloridas com as cores azul, amarela, vermelha, verde, lilás e laranja. Nesse brinquedo, as faces podem ser desmontadas e remontadas em qualquer ordem. Em determinada ocasião, Mariana desmontou o cubo e remontou-o em outra ordem das faces, mas quando o colocou sobre a mesa e o girou horizontalmente, reparou que ele estava idêntico ao que era antes de desmontar. Então ela percebeu que essas duas montagens não geravam cubos diferentes.
Quantos cubos diferentes Mariana pode obter ao desmontar e remontar o seu brinquedo?

Questão 10 – Resposta: 30

Solução: Numerando as faces de 1 a 6 e realizando um cálculo de permutação, obtemos $6! = 720$ montagens para o cubo de Mariana. A questão é saber quantos cubos idênticos há, para cada uma dessas montagens. Duas montagens geram cubos idênticos quando é possível obter um deles a partir do outro, apenas rotacionando o cubo, na horizontal ou na vertical. Observe que dada uma montagem qualquer, se posicionarmos qualquer das faces no chão e rotacionarmos o cubo horizontalmente, obtemos 4 montagens que geram cubos iguais. Como determinada montagem tem 6 faces, e qualquer uma delas pode ficar no chão, esse método de contagem descobre $6 \cdot 4 = 24$ montagens que geram cubos idênticos. Além disso, essas são todas elas. Portanto, para cada 24 montagens das 720 contadas inicialmente, devemos considerar apenas um cubo diferente. Assim, o número de montagens que geram cubos diferentes para o brinquedo de Mariana é $720/24 = 30$.