SOLUÇÃO DA PROVA DA 2ª FASE – OMIFCE 2024
Nível II

01. Se $2^{2027} - 2^{2026} + 2^{2025} - 2^{2024} = k.2^{2024}$, qual é o valor de k?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Questão 01 – Alternativa E

Solução: Colocando 2^{2024} em evidência, obtemos:

$$2^{2024} \cdot (2^3 - 2^2 + 2 - 1) = 5.2^{2024}.$$

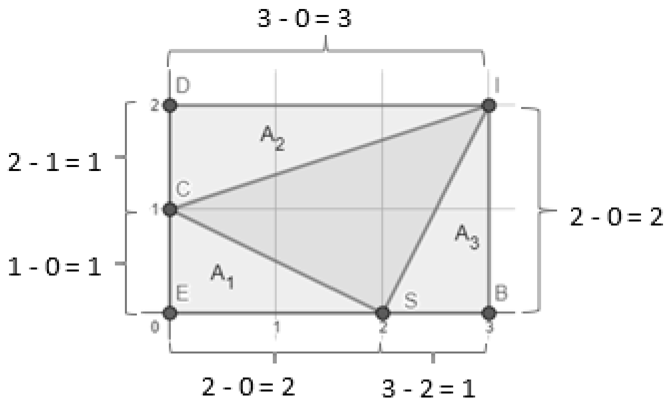
Logo, $k = 5$.

02. Durante uma missão de reconhecimento, três ninjas da Vila Oculta da Folha, Shikamaru (S), Chôji (C) e Ino (I) receberam instruções específicas para montar um campo de observação triangular em uma região plana. Sabendo que a eficácia da missão depende da área a ser monitorada, os ninjas posicionaram-se, respectivamente, nos pontos estratégicos $S(2,0)$, $C(0,1)$ e $I(3,2)$, em que as coordenadas estão em quilômetros.
Qual a área, em km^2, do triângulo SCI, região a ser monitorada?

A) 1,0
B) 1,5
C) 2,0
D) 2,5
E) 3,0

Questão 02 – Alternativa D

Solução: Localizando os pontos S, C e I no plano cartesiano abaixo, observa-se que o triângulo SCI está inscrito no retângulo $EBID$, cujos lados são $ED = 2\ km$ e $EB = 3\ km$.



Conforme a figura, têm-se que a área monitorada (triângulo SIC) é igual a:

$$\begin{aligned}[SIC] &= [EBID] - [CES] - [IDC] - [BIS] \\ &= 3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} \\ &= 6 - 1 - 1{,}5 - 1 \\ &= 2{,}5\end{aligned}$$

Logo, a área monitorada é igual a 2,5 km^2.

03. A adição abaixo apresenta quatro parcelas naturais de três dígitos, cuja soma é 3219, escritas no sistema de numeração decimal, em que as letras I, F, C, E representam algarismos diferentes de zero.

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{I} & \mathbf{F} & \mathbf{C} \\ & \mathbf{F} & \mathbf{C} & \mathbf{E} \\ + & \mathbf{C} & \mathbf{E} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{E} & \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{array}$$

Qual é o valor numérico da soma dos dígitos I + F + C + E?

A) 29
B) 28
C) 19
D) 18
E) 9

Questão 03 – Alternativa A

Solução: Sendo $x = \text{I} + \text{F} + \text{C} + \text{E}$, somando os valores relativos dos algarismos das unidades, dezenas e centenas, devemos obter:

$$x \cdot 1 + x \cdot 10 + x \cdot 100 = 3219$$

$$111x = 3219$$

$$x = \frac{3219}{111} = 29$$

04. Marcam-se vários pontos distintos em um plano e traçam-se todos os segmentos determinados por esses pontos. Uma reta r não passa por nenhum desses pontos marcados e intersecta exatamente 42 dos segmentos que foram traçados.
No máximo, quantos segmentos traçados podem não estar intersectados por r?

A) 211
B) 452
C) 773
D) 861
E) 974

Questão 04 – Alternativa D

Solução: Como, dentre os pontos marcados, nenhum fica sobre r, temos x deles de um lado de r e y do outro, sendo que são traçados $x \cdot y = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ segmentos intersectados por r. Logo, x e y são divisores positivos complementares de 42, ou seja:

$$42 = 1 \cdot 42 \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 42$$

ou

$$42 = 2 \cdot 21 \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 21$$

ou

$$42 = 3 \cdot 14 \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 14$$

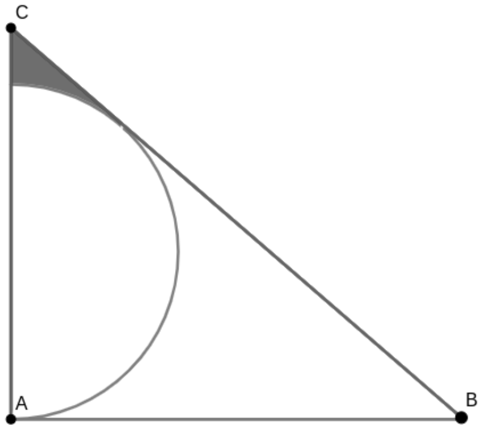
ou

$$42 = 6 \cdot 7 \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 7.$$

Assim, foram traçados $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}$ segmentos não intersectados por r, e essa quantidade pode ser $\frac{1(1-1)}{2} + \frac{42(42-1)}{2} = 861$ ou $\frac{2(2-1)}{2} + \frac{21(21-1)}{2} = 211$ ou $\frac{3(3-1)}{2} + \frac{14(14-1)}{2} = 94$ ou $\frac{6(6-1)}{2} + \frac{7(7-1)}{2} = 36$.

Logo, no máximo, podemos ter 861 segmentos não intersectados pela reta r.

05. A figura abaixo representa um triângulo ABC, retângulo em A. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, em centímetros, $3+2\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, respectivamente. Uma semicircunferência foi inscrita no triângulo a partir do vértice A de modo que o seu diâmetro está sobre o lado $\overline{AC}$, sendo tangente à hipotenusa.



Qual a área, em cm^2, da região sombreada?

A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}$

B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

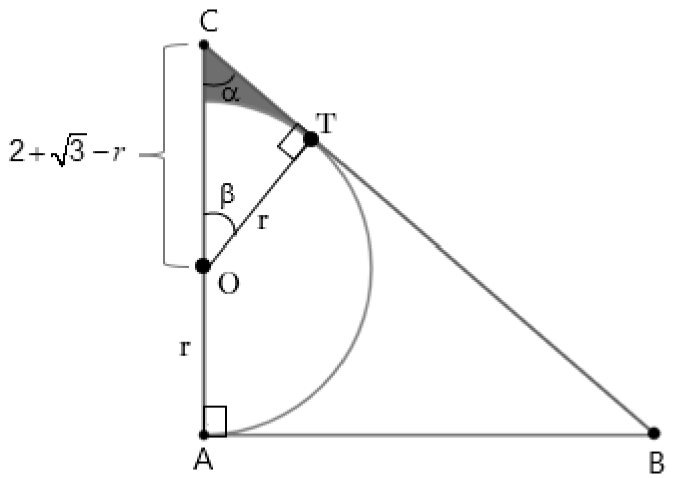
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$

E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$

Questão 05 – Alternativa C

Solução: Sendo O, T, r e α o centro da semicircunferência, o ponto de tangência, o raio e a medida do ângulo ACB, respectivamente, têm-se a seguinte figura relativa ao enunciado.



Nessa figura, têm-se:

i) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4-3} = \dfrac{6-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6}{1} = \sqrt{3}$.

Daí, $\alpha = 60°$ e $\beta = 90° - 60° = 30°$.

ii) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{OT}{OC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{r}{2+\sqrt{3}-r} \Rightarrow 2r = 2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}r \Rightarrow r(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}+3}{(2+\sqrt{3})} = \frac{(2\sqrt{3}+3)(2-\sqrt{3})}{4-3} = 4\sqrt{3}-6+6-3\sqrt{3} = \sqrt{3}\ .$$

Logo, a área sombreada será a área do triângulo CTO, menos a área do setor de $\beta = 30°$ e raio $r = \sqrt{3}\ cm$, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{A}_{\text{SOMBREADA}} &= \frac{1}{2}\cdot OC \cdot OT \cdot \text{sen}\,\beta - \frac{\beta}{360°}\cdot \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2+\sqrt{3}-r)r\cdot \text{sen}\,30° - \frac{30°}{360°}\cdot \pi(\sqrt{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(2+\sqrt{3}-\sqrt{3})\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot 3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

06. Determinado número inteiro positivo x é tal que

$$\frac{x}{432} = 0{,}0\overline{a25}\,,$$

em que a é um dígito e $0{,}0\overline{a25} = 0{,}0a25a25a25...$ é uma dízima periódica cujo período é $a25$. Nessas condições, é correto afirmar que

A) existe um único valor possível para x e ele é primo menor do que 45.
B) existe um único valor possível para x e ele é composto menor do que 45.
C) existem dois valores possíveis para x, sendo um primo e o outro composto.
D) existe um único valor possível para x e ele é primo maior do que 45.
E) existe um único valor possível para x e ele é composto maior do que 45.

Questão 06 – **Alternativa B**

Solução: Temos que $\dfrac{x}{432}\cdot 10 = 0{,}\overline{a25}$ e $\dfrac{x}{432}\cdot 10^4 = a25{,}\overline{a25}$. Daí, subtraindo-se membro a membro a primeira da segunda igualdade, obtém-se:

$$\frac{x}{432}\cdot 10^4 - \frac{x}{432}\cdot 10 = a25{,}\overline{a25} - 0{,}\overline{a25} \Rightarrow \frac{x}{432}\cdot(10^4-10) = a25 \Rightarrow x = \frac{(a25)\cdot 432}{9990} \Rightarrow x = \frac{(a25)\cdot 2^4\cdot 3^3}{2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 37} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{(a25)\cdot 8}{5\cdot 37}$$

Como x é inteiro, 8 e 37 são primos entre si e $a25 = 100a + 25$ é divisível por 25, obrigatoriamente, $a25$ é múltiplo de 25 e de 37, sendo 25 e 37 primos entre si. Logo, devemos ter:

$$100 \le a25 = b\cdot 25\cdot 37 = b\cdot 925 \le 999, \text{ em que } b \text{ é inteiro.}$$

Portanto, $b = 1$ (único valor possível). Daí tem-se que $a25 = 925$, ou seja, $x = \frac{(925)\cdot 8}{5\cdot 37} = \frac{25\cdot 37\cdot 8}{5\cdot 37} = 40$, que é composto e menor do que 45.

07. Considere S o conjunto de todos os números inteiros n, para os quais a fração a seguir é também um número inteiro:

$$\frac{n^3 + 2n^2 + n + 62}{n^2 + 1}.$$

Quantos elementos tem o conjunto S?

Questão 07 – Resposta: 7

Solução: A fração dada pode ser escrita como

$$\frac{n^3 + 2n^2 + n + 62}{n^2 + 1} = \frac{(n^3 + n) + (2n^2 + 2) + 60}{n^2 + 1} = \frac{n\left(n^2 + 1\right) + 2\left(n^2 + 1\right) + 60}{n^2 + 1} = n + 2 + \frac{60}{n^2 + 1}.$$

Isso mostra que a fração será um número inteiro se, e somente se, $n^2 + 1$ é divisor de $60 = 1\cdot 60 = 2\cdot 30 = 3\cdot 20 = 4\cdot 15 = 5\cdot 12 = 6\cdot 10$. Como n deve ser inteiro e $n^2 + 1$, divisor de 60, é obrigatoriamente maior do que ou igual a 1, esqueçamos os divisores negativos de 60 e analisemos apenas os positivos. Temos, então, as seguintes possibilidades:

- $n^2 + 1 = 60, 30, 3, 20, 4, 15, 12$ ou 6, mas, nesses casos, n não é inteiro;
- $n^2 + 1 = 1 \Rightarrow n^2 = 0 \Rightarrow n = 0$;
- $n^2 + 1 = 2 \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow n = 1$ ou $n = -1$;
- $n^2 + 1 = 5 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$ ou $n = -2$;
- $n^2 + 1 = 10 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = 3$ ou $n = -3$.

Logo, $n \in S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, que apresenta 7 elementos.

08. O professor Fernando deseja festejar seus 10 anos de magistério juntamente com alguns de seus 10 melhores amigos de profissão.
De quantas maneiras ele poderá convidar mais de um, mas não todos os dez melhores amigos para essa festa?

Questão 08 – Resposta: 1012

Solução: Sem restrição alguma, para cada um dos dez melhores amigos existem duas possibilidades (ser convidado ou não ser convidado), perfazendo um total de

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024 \text{ maneiras de convidá-los.}$$

No entanto, dentre essas maneiras, devemos excluir aquela em que nenhum dos dez é convidado, as dez maneiras em que apenas um é convidado e aquela em que todos os dez são convidados.

Portanto, existem $1024 - 1 - 10 - 1 = 1012$ modos do professor Fernando convidar mais de um, mas não todos os dez melhores amigos.

09. Pietro Paolo, gerente da renomada Pizzaria Mamma Mia, observou que, para cada 5 reais de desconto no preço da famosa pizza de pepperoni, as vendas aumentam em 25 pizzas. Atualmente, o preço da pizza de pepperoni é de 60 reais, e a pizzaria vende 160 pizzas desse sabor por dia. Sabe-se que o custo de produção de cada pizza é de 20 reais. Pietro quer determinar o desconto que deve oferecer para maximizar o lucro com a venda de toda a produção diária desse tipo de pizza.
Qual é o valor do desconto, em reais, que Pietro deve aplicar no preço da pizza de pepperoni para maximizar o lucro?

Questão 09 – Resposta: 4

Solução: Seja x o desconto oferecido pela pizzaria. Temos que o preço e a quantidade de pizzas vendidas, em função do desconto x, serão, respectivamente, $P(x) = 60 - x$ e $Q(x) = 160 + \frac{x}{5} \cdot 25$.

Assim, o lucro obtido com a venda de uma pizza será $P(x) - 20 = 40 - x$, e o lucro diário obtido com a venda das $Q(x) = 160 + 5x$ pizzas produzidas e vendidas será dado pela função:

$$L(x) = Q(x) \cdot (P(x) - 20)$$

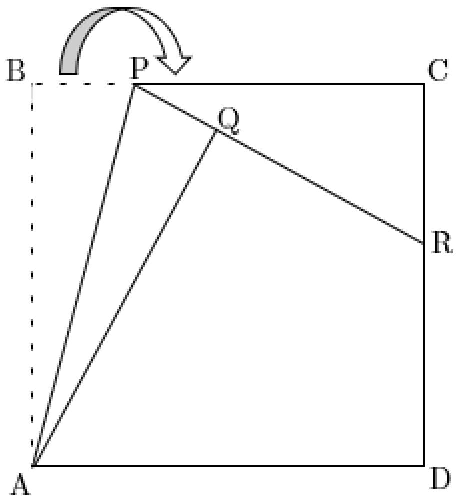
$$L(x) = (160 + 5x) \cdot (40 - x),$$

uma função do segundo grau cujo termo em x^2 é $-5x^2$ e cujas raízes são as raízes de $160 + 5x = 0$ e $40 - x = 0$, ou seja, as raízes são $x_1 = -32$ e $x_2 = 40$.

Logo, o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, cujo valor máximo ocorre quando x assume valor igual à abscissa do vértice. Daí, para o lucro máximo, devemos ter:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-32 + 40}{2} = 4$$

10. Fabiana confeccionou um quadrado $ABCD$ de 25 cm de lado, em cartolina, e marcou um ponto P no lado $\overline{BC}$. Ao dobrar a cartolina ao longo do segmento $\overline{AP}$, o ponto B determina o ponto Q, conforme mostra a figura a seguir, na qual a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ intersecta o lado $\overline{CD}$ em R.



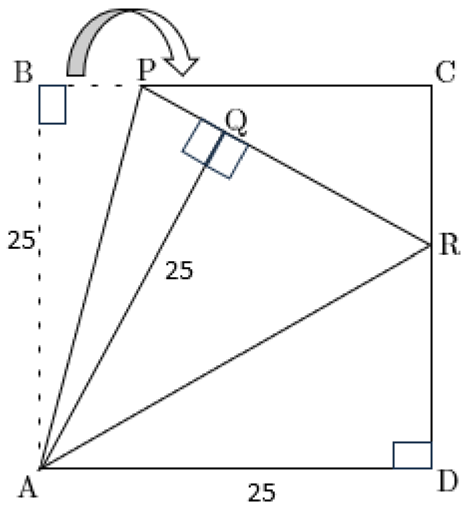
Qual é o perímetro, em centímetros, do triângulo PCR?

Questão 10 – Resposta: 50

Solução: Temos que:

i) Os triângulos PAQ e PAB são congruentes, uma vez que PAQ é o triângulo PAB transladado. Daí, $PQ = PB$, $AQ = AB = 25$ cm (lado do quadrado) e $AQP = ABP = 90°$ (ângulo interno do quadrado).

ii) Os triângulos AQR e ADR são congruentes, caso especial de congruência de triângulos retângulos, cateto - hipotenusa, uma vez que $\overline{AR}$ é lado comum, $AQ = 25$ $cm = AD$ (lado do quadrado) e $AQR = ADR = 90°$. Daí, $RQ = RD$.



Logo, o perímetro do triângulo PCR será igual a:

$$\begin{aligned}
\text{Perímetro de } PCR &= CP + CR + RP \\
&= CP + CR + RQ + QP \\
&= CP + CR + RD + PB \\
&= \big(CP + PB\big) + \big(CR + RD\big) \\
&= CB + CD \\
&= 25\ cm + 25\ cm = 50\ cm.
\end{aligned}$$