PROVA DA OMIFCE 2024

1ª Fase – Nível III

01. Durante os festejos do seu bairro, Miranda se deparou com uma banca que oferecia um jogo intrigante. O jogador aposta certa quantia e lança dois dados idênticos, um após o outro. Se o resultado do segundo dado for maior do que o do primeiro, o jogador vence e recebe da banca o dobro do valor apostado. Analisando esse jogo, Miranda notou que as faces dos dados eram numeradas de 1 a 6 e apresentavam as mesmas probabilidades de ocorrência. Percebendo que se tratava de um jogo honesto, ele calculou corretamente a probabilidade de vencer o jogo e decidiu participar.

Qual a probabilidade de Miranda vencer o jogo?

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{4}{9}$

D) $\frac{5}{12}$

E) $\frac{7}{15}$

02. Lia e Esdras fazem parte de uma equipe de sete pessoas que estão desenvolvendo um aplicativo inovador para mapear e reportar, em tempo real, a localização de buracos nas rodovias federais. Este projeto está atraindo grande atenção, e a equipe foi convidada a apresentar o aplicativo em uma importante feira de novas tecnologias. Para isso, uma comissão de quatro pessoas será escolhida entre os membros da equipe. No entanto, por questões de logística e continuidade do desenvolvimento do aplicativo, não é permitido que tanto Lia quanto Esdras façam parte da comissão ao mesmo tempo, ou seja, se um deles for escolhido, o outro deverá permanecer no projeto.

Considerando a restrição descrita, de quantas maneiras diferentes é possível formar essa comissão?

A) 35

B) 25

C) 20

D) 15

E) 10

03. Em um trapézio $ABCD$ de área igual a 1 cm^2, um ponto E da base maior $\overline{AD}$ a divide de modo que $AE = 2ED$. Sabe-se ainda que a base menor $\overline{BC}$ é congruente ao segmento $\overline{DE}$.

Qual a área, em cm^2, do quadrilátero $BCDE$?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{2}{5}$

04. Para ajudar seu cãozinho Chico a se refrescar nos dias de calor, João comprou uma grande vasilha cilíndrica. Durante esses dias, ele enche a vasilha parcialmente com água, para que Chico possa brincar com seu cubo de brinquedo preferido, que possui aresta de 8 cm e é feito de um material mais denso que a água. Em um dia particularmente quente, João decidiu medir o volume de Chico usando a vasilha de água. Primeiro, ele colocou o cubo dentro da vasilha, que afundou completamente, e observou que o nível da água subiu 0,5 *cm*. Em seguida, Chico mergulhou na vasilha para pegar seu brinquedo, e o nível da água subiu mais 8 *cm*, sem que houvesse transbordamento. Usando seus conhecimentos matemáticos, João conseguiu calcular corretamente o volume do seu cãozinho.

Com base nessas informações, pode-se inferir que o volume de Chico corresponde, aproximadamente, a

A) 5,8 L.

B) 6,4 L.

C) 7,0 L.

D) 7,6 L.

E) 8,2 L.

05. João tem 70 banquinhos coloridos, sendo eles 40 brancos, 18 pretos e 12 vermelhos. Ele deseja enfileirá-los de modo que dois banquinhos vizinhos tenham cores diferentes. No máximo, quantos desses banquinhos ele poderá usar?

A) 61

B) 63

C) 66

D) 68

E) 70

06. O inverso do quadrado da soma dos quadrados dos inversos de dois números não nulos (reais ou não) equivale ao produto dos quadrados desses números.

Nessas condições, a soma dos quocientes das divisões de cada um desses números pelo outro pode ser igual a

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 3.

E) 4.

07. Considere a equação do segundo grau $x^2 - 2x - 6 = 0$, cujas raízes são denotadas por u e v e são tais que $u^3 - v^3 = a$ e $u^4 - v^4 = b$.

Com base nessas informações, pode-se concluir corretamente que $u^5 - v^5$ é equivalente a

A) $2a - 6b$.

B) $5a + 2b$.

C) $4a + 5b$.

D) $6a + 2b$.

E) $5a - 2b$.

08. Algumas sequências numéricas, $(a_n)_{n\geq 1} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, podem ser definidas através de uma *recorrência*, que é uma relação matemática que define os termos da sequência em função de termos anteriores. Em outras palavras, a recorrência estabelece uma fórmula que permite calcular o próximo termo da sequência com base em um ou mais termos anteriores. Um exemplo clássico de relação de recorrência é a *sequência de Fibonacci*, $(F_n)_{n\geq 1} = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots)$, na qual cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, ou seja:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

para $n \geq 3$, com as condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Neste caso da sequência de Fibonacci, para calcular qualquer termo F_n, é necessário conhecer os seus dois termos antecessores imediatos.

Considerando R_n o resto da divisão de $F_n^{\,2}$ por 4, em que F_n é o enésimo termo da sequência de Fibonacci, qual é o valor numérico de $R_{23} + R_9 + R_{2024}$?

A) 0

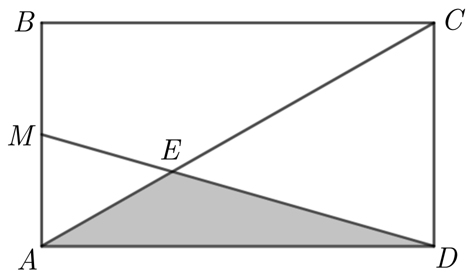
B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

09. Na figura, $ABCD$ é um retângulo com área igual a 420 cm^2. O ponto M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DM}$ se intersectam no ponto E.



Qual é a área do triângulo AED?

A) 70 cm^2

B) 76 cm^2

C) 80 cm^2

D) 90 cm^2

E) 92 cm^2

10. Considere S o conjunto de todos os números inteiros n para os quais a fração $\dfrac{4n+7}{n-2}$ é também um número inteiro.

Qual a soma dos elementos de S?

A) 13

B) 14

C) 15

D) 16

E) 17

11. O *Algoritmo da Divisão de Euclides* pode ser enunciado da seguinte forma: "Dados dois inteiros a e b, $b>0$, existe um único par de inteiros q (quociente) e r (resto) tais que $a=q\times b+r$, com $0\leq r<b$".

Considerando a igualdade a seguir

$$\frac{972}{157}=x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{1}{x_4+\cfrac{1}{x_5}}}},$$

em que x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são inteiros positivos, é correto dizer que a soma $S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ é

A) menor do que 19.

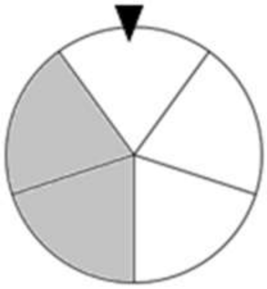
B) igual a 19.

C) igual a 20.

D) igual a 21.

E) maior do que 21.

12. O professor Pardal construiu uma roleta dividindo um círculo de madeira em 5 setores iguais, pintando três deles de branco e os outros dois, de cinza (não branco), conforme mostra figura abaixo.



Em uma de suas aulas, o mestre Pardal girará essa roleta 4 vezes e anotará no quadro, em sequência, o resultado obtido ao final de cada giro: branco (B) ou não branco ($\overline{B}$).

Qual a probabilidade de o professor Pardal obter uma sequência com exatamente um resultado branco e três não brancos (cinzas), nesse experimento?

A) $\dfrac{32}{625}$

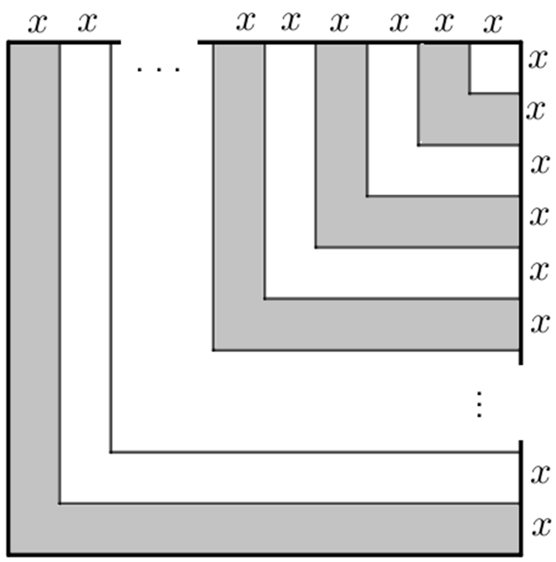
B) $\dfrac{48}{625}$

C) $\dfrac{64}{625}$

D) $\dfrac{80}{625}$

E) $\dfrac{96}{625}$

13. Um quadrado de lado $100x$ foi dividido em faixas em formato de "L", sendo cada faixa de largura x e ângulos todos retos. Em seguida, essas faixas foram pintadas de modo alternado, da direita para a esquerda, uma branca e outra pintada de cinza, e assim sucessivamente, conforme figura abaixo.



Qual a área pintada de cinza, em função de x?

A) $5010x^2$

B) $5020x^2$

C) $5030x^2$

D) $5040x^2$

E) $5050x^2$

14. Considere a seguinte potência, na qual a base é o somatório dos fatoriais de 1 a 2024:

$$(1! + 2! + \ldots + 2024!)^{2024}\,.$$

Qual o algarismo das unidades do valor numérico dessa potência?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

15. O produto dos números naturais de 1 a n pode ser representado pelo símbolo $n!$, ou seja, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Considere a seguinte igualdade, na qual a_1, a_2, ..., a_n são inteiros tais que $0 \leq a_k \leq k$ e o último termo $a_n \cdot n!$ é diferente de zero:

$$2024 = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots + a_n \cdot n!.$$

Qual o valor de a_5?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

16. Seja k a soma das 2024 parcelas a seguir:

$$k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}.$$

Considere agora a seguinte soma S de 2024 potências de expoente 2, na qual cada base, a partir da segunda potência, tem um termo a menos do que a base da potência imediatamente anterior:

$$S = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}\right)^2 + \left(\frac{1}{2024}\right)^2.$$

Nessas condições, o valor de S, em função de k, será igual a

A) $2024 - k$.

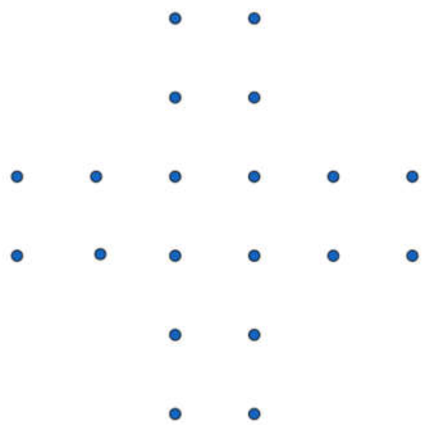
B) $4048 - k$..

C) $2024 - k^2$.

D) $4048 - k^2$.

E) $2024^2 - k^2$.

17. Na figura a seguir, os 20 pontos estão dispostos em forma de cruz, de forma que a distância entre dois pontos consecutivos (de uma mesma horizontal ou vertical) é sempre a mesma.



Quantos quadrados são possíveis construir escolhendo-se quatro desses pontos como vértices?

A) 1

B) 9

C) 21

D) 25

E) 30

18. Em uma de suas aulas de matemática, a professora Mariana preparou uma atividade prática. Ela confeccionou, utilizando EVA (Espuma Vinílica Acetinada), todos os triângulos possíveis com lados de medidas inteiras, em decímetros (dm), e menores que 5 dm. Estes triângulos podem ser equiláteros, isósceles ou escalenos, dependendo das medidas dos seus lados.

Após confeccionar os triângulos, Mariana numerou-os de 1 a n, em que n representa o total de triângulos possíveis. Para realizar um sorteio, ela também numerou n bolas correspondentes a cada triângulo e as colocou dentro de um globo. Durante a aula, ela explicou que os triângulos seriam fixados na parede, formando uma fileira, à medida que as bolas fossem retiradas do globo. A professora, então, lançou a seguinte desafio à turma:

"Quantas bolas, no mínimo, devem ser sorteadas para garantir que pelo menos um triângulo equilátero seja fixado na parede?"

A resposta correta para esse desafio é

A) 4.

B) 5.

C) 9.

D) 10.

E) 13.

19. Em comemoração à edição de 2024 da OMIFCE, o professor Pedro criou uma moeda que trazia em uma das faces a logomarca da olimpíada e, na outra, a logomarca do IFCE.

O professor Pedro fez uma exposição de todas as 200 moedas já produzidas, na qual as moedas foram expostas enfileiradas e com a logomarca do IFCE voltada para cima. Ao observar as duzentas moedas, Fabiano começou a manipulá-las seguindo um padrão. Inicialmente, na primeira rodada, Fabiano virou todas as 200 moedas colocando a logomarca da OMIFCE voltada para cima. Logo após, na segunda rodada, ele virou as moedas em posições pares (múltiplas de 2), não mexendo nas demais. Em seguida, na terceira rodada, virou as moedas em posições múltiplas de 3, não mexendo nas demais. Nas rodadas seguintes, Fabiano continuou com o processo, virando as moedas em posições múltiplas de 4, depois as de posições múltiplas de 5, e assim continuadamente até a 200ª rodada, na qual Fabiano virou a moeda de posição múltipla de 200, finalizando a manipulação. Vendo o fascínio de Fabiano pelas moedas, o professor Pedro pegou uma com a logomarca da OMIFCE voltada para cima e deu para ele.

Dentre as alternativas a seguir, qual aquela que pode indicar a posição da moeda recebida por Fabiano?

A) 59

B) 62

C) 64

D) 66

E) 68

20. Hoje, 23 de setembro de 2024, ao ser indagado sobre o ano de seu nascimento, Marcos afirmou: *"Eu e meu pai, que nasceu no século XX, estamos aniversariando exatamente hoje, e se você somar uma constante aos números 20, 50 e 100 obterá uma PG de três termos, dos quais dois representam a minha idade e a de meu pai"*.

Qual a soma dos algarismos do ano de nascimento de Marcos?

A) 25

B) 26

C) 27

D) 28

E) 29